

آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : ریاضی		ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :		رشته : ریاضی و تجربی	پایه ی دهم دوره ی متوسطه	تعداد صفحات : ۱۱ صفحه
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه		جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید		
ردیف	سوالات			
	نمره			

۱ در مثلث  $ABC$ ، زاویه قائمه،  $AB = 6$  و  $AC = 10$  می باشد. نسبت های مثلثاتی زاویه  $\hat{C}$  را به دست آورید.

۲ اگر  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \frac{2}{3}$ ، مقدار  $\tan^2 \alpha$  را به دست آورید.

به سوالات زیر پاسخ دهید:

۳ عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$2x^2 + 3x + 1$$

۴ مخرج کسر زیر را گویا کنید.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a} - 3}$$

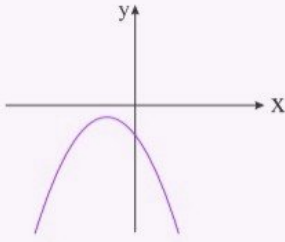
۵ جمله چندم دنباله هندسی داده شده برابر  $\frac{512}{729}$  می باشد؟

$18, -12, 8, \dots$

۶ یک فرمول کلی برای حل معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  که در آن  $a \neq 0$  است، پیدا کنید.

۷ مجموع سه عدد که تشکیل دنباله حسابی می دهند ۲۱ و مجموع مربعات آنها ۲۱۹ است. سه عدد را بیابید.

۸ به‌ازای کدام مقادیر  $a$ ، سهمی به معادله  $y = (a - 1)x^2 + (a - 1)x - 4$  به‌صورت زیر است؟



۹ در یک دنباله حسابی،  $a_1 + a_4 + a_7 + a_{10} + a_{13} = 25$  و  $a_2 + a_5 + a_8 + a_{11} + a_{14} = 27/5$  است. جمله اول این دنباله را بیابید.

۱۰ نسبت دو عدد طبیعی  $\frac{2}{3}$  و حاصل‌ضربشان از مجموع آن‌ها ۱۴ واحد بیشتر است. اختلاف این دو عدد را به دست آورید.

۱۱ اگر کمترین مقدار ممکن برای عبارت  $|M| \sin^3 \alpha + 6 \cos^2 \beta$  برابر ۵- باشد، بیشترین مقدار ممکن برای  $M$  چیست؟

۱۲ مجموعه جواب نامعادله زیر را بیابید.

$$\frac{(x^2 + 9)(|x| + 3)}{(x^2 - 1)(x^2 - x + 1)} \leq 0$$

۱۳ معادله  $۲x^۲ + ۸x - ۱۰ = ۰$  را به روش مربع کامل حل کنید.

۱۴ حاصل عبارت  $\frac{x^۳ - x^۲ - x + ۱}{x^۶ - x^۴ - x^۲ + ۱}$  را به ازای  $x = \sqrt{۵}$  به دست آورید.

۱۵ دنباله  $۳, ۱۰, ۲۱, ۳۶, \dots$  را در نظر بگیرید.

الف جمله عمومی دنباله را بنویسید.

ب یک الگوی مناسب برای آن رسم کنید.

۱۶ حاصل عبارت  $(۱۰ + ۴\sqrt{۶})^{\frac{۳}{۴}} + (۱۰ - ۴\sqrt{۶})^{\frac{۳}{۴}}$  را محاسبه کنید.

۱۷ اگر  $\tan \beta = ۳$  باشد، حاصل  $\frac{۳ \sin \beta + ۵ \cos \beta}{۱۰ \cos \beta - \sin \beta}$  را به دست آورید.

۱۸ تعداد ضربان قلب، پس از  $x$  دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطه  $y = \frac{۱۵}{۸}x^۲ - ۳۰x + ۲۰۰$  به دست می آید.

الف در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟

ب آیا تمام جواب‌های به‌دست‌آمده قابل‌قبول‌اند؟

۱۹ نامعادلات زیر را حل کنید.

الف  $0 < |x - 3| < 4$

ب  $|x - 3| \geq 0$

پ  $|x - 3| > 0$

ت  $-1 < |x - 3| \leq 2$

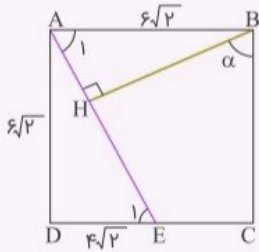
ث  $|x - 3| \leq 0$

ج  $-1 < |x - 3| < 0$

۲۰ اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $-x^2 + 4x - 3 = 0$  باشند، بدون حل معادله حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

۲۱ با فرض مربع بودن ABCD، مقدار  $\tan \alpha$  را به دست آورید.



۲۲ اگر  $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{z}$ ، حاصل  $\frac{z - \sqrt[3]{xyz}}{x + y}$  را بیابید.

۲۳ مجموع ۵ جمله اول دنباله حسابی ۲۵ و مجموع ۵ جمله بعدی آن ۷۵ است. دنباله را مشخص کنید.

۲۴ اگر  $A = \{x | x \in \mathbb{R}, \frac{3x-1}{2} \geq 1\}$  و  $B = \{x | x \in \mathbb{R}, 2x \leq 4\}$  باشند، مجموعه‌های A و B و حاصل مجموعه‌های  $A - B$  و  $A'$  را به صورت بازه نمایش دهید.

در کلاسی ۳۷ دانش‌آموز وجود دارد. از این تعداد، ۵ نفر نه به موسیقی و نه به ورزش علاقه دارند، ۲۲ نفر دوستدار موسیقی و ۱۷ نفر دوستدار ورزش هستند. حال فرض کنید ۷ نفر از دوستداران موسیقی، علاقه‌ی خود را به این زمینه از دست بدهند. اگر مشخص باشد که ۳ نفر از این ۷ نفر، جزو افراد مشترک بوده‌اند و تعداد کل دوستداران ورزش تغییری نمی‌کند، در وضعیت جدید چند نفر حداقل به یک زمینه علاقه دارند؟

قرار است در پایان یک دوره مسابقات فوتبال ساحلی تیم‌های اول تا پنجم مورد تقدیر قرار گیرند. به همین جهت تعداد ۶۰ سکه بهار آزادی در اختیار مسئول برگزاری مسابقات قرار گرفته است. این سکه‌ها را چطور می‌توان بین این پنج تیم تقسیم کرد به طوری که سهم هر تیم منتخب از سکه‌ها تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند و مجموع سکه‌های دریافتی سه تیم اول معادل دو تیم آخر باشد؟

در شکل زیر:





الف الگویی برای تعداد پاره‌خط‌های شکل n ام بنویسید.

ب شکل مرحله چهارم را رسم کنید.

۲۸ در یک گروه ۵۰ نفری ۲۶ نفر مجله A را می‌خوانند و ۱۵ نفر مجله B نمی‌خوانند و ۵ نفر هیچ‌کدام از دو مجله را نمی‌خوانند. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف چند نفر هر دو مجله را می‌خوانند؟

ب چند نفر فقط یک مجله می‌خوانند؟

پ چند نفر حداکثر یک مجله می‌خوانند؟

۲۹ در یک کلاس ۴۰ نفری، ۲۵ نفر عضو فوتبال و ۳۲ نفر عضو والیبال هستند. اگر ۶ نفر عضو هیچ‌کدام از این دو گروه نباشند، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف چه تعداد از دانش‌آموزان عضو هر دو گروه هستند؟

ب چه تعداد از دانش‌آموزان دقیقاً در یک گروه‌اند؟



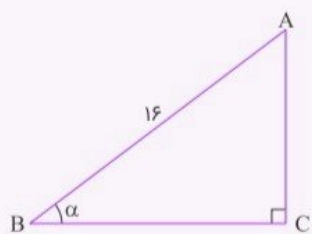
$$\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)(1 + \sin \alpha \cos \alpha)$$

اگر  $a = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} - 1}$  و  $b = \sqrt{2} - 1$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{ab+1}{b}$  را بیابید.

در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه  $t$  از رابطه  $h = -5t^2 + 18t + 13$  محاسبه شود، در چه فاصله زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

در شکل زیر، اندازه وتر برابر ۱۶ و محیط مثلث برابر ۳۵ است. حاصل تقریبی  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  را به دست آورید.



۳۵ اگر  $x + y + z = w$ ، مقدار عبارت  $A = \frac{w^3 - z^3 - x^3 - y^3}{x^2y + xy^2 + w^2z - wz^2}$  را بیابید.

۳۶ نامعادله  $\frac{3}{x-4} + \frac{5}{x+4} > \frac{8}{x^2-16}$  را حل کنید.

۳۷ نامعادله زیر را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه نشان دهید.

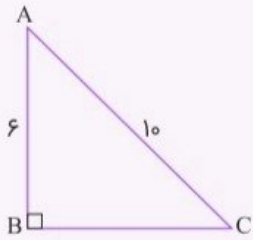
$$\frac{6-x^2}{x} > 1$$

فاصله هر طرف قالی از کنار دیوار یک اتاق مستطیل شکل ثابت است. اگر مساحت اتاق ۲۴، محیط اتاق ۲۰ و محیط قالی ۱۲ باشد، طول و عرض قالی را به دست آورید.

درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.

دنبالهٔ  $۱, ۴, ۹, ۱۶, \dots$  یک دنباله حسابی است.

آزمون شبیه ساز نیمسال اول درس : ریاضی	ساعت شروع :	تاریخ امتحان :	مدت امتحان :
نام و نام خانوادگی :	رشته : ریاضی و تجربی	پایه ی دهم دوره ی متوسطه	تعداد صفحات : ۱۳ صفحه
آزمون شبیه ساز + پاسخنامه	جهت دریافت ۷ روز مشاوره و برنامه ریزی رایگان پادینو با شماره 02166906790 تماس بگیرید		
ردیف	پاسخنامه		نمره



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow 100 = 36 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = 64 \Rightarrow BC = 8$$

$$\sin \hat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \quad \cos \hat{C} = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \quad \cot \hat{C} = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = \frac{2}{3} \Rightarrow 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2}{3} \Rightarrow 2\cos^2 \alpha = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{5}{6} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}$$

پاسخ سؤالات ۳ تا ۴

$$A = 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow 2A = 4x^2 + 3(2x) + 2 \Rightarrow \frac{2A}{2} = \frac{(2x+1)(2x+2)}{2} \Rightarrow A = (2x+1)(x+1)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}-3} \times \frac{\sqrt[3]{a^2} + 3\sqrt[3]{a} + 9}{\sqrt[3]{a^2} + 3\sqrt[3]{a} + 9} = \frac{\sqrt[3]{a^2} + 3\sqrt[3]{a} + 9}{a-27}$$

$$r = -\frac{2}{3}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \Rightarrow \frac{512}{729} = 18 \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف تقسیم بر 18}} \frac{512}{729 \times 18} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه اعداد}} \frac{2^9}{3^8 \times 2} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^8 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}\right)^8 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow n = 9$$



معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  را با روش مربع کامل، طی مراحل زیر حل می‌کنیم:

$ax^2 + bx + c = 0$	
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$	دو طرف معادله را بر $a$ تقسیم می‌کنیم.
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	به دو طرف معادله، $-\frac{c}{a}$ را اضافه می‌کنیم.
$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$	به دو طرف معادله، $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ را اضافه کرده‌ایم تا سمت چپ مربع کامل شود.
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$	دو طرف را ساده کرده‌ایم.

اکنون قرار می‌دهیم  $\Delta = b^2 - 4ac$  پس:  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ . با ریشه دوم گرفتن از دو طرف این معادله، جواب‌های آن را به دست می‌آوریم.

اگر  $\Delta < 0$  باشد، از سمت راست نمی‌توان ریشه دوم گرفت پس معادله درجه دوم ریشه‌ای ندارد. اگر  $\Delta > 0$  باشد، کافی است از دو طرف معادله  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$  ریشه دوم بگیریم:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

اگر  $\Delta = 0$  باشد، این ریشه از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

پس در حالت  $\Delta = 0$  معادله تنها یک ریشه به صورت  $x = -\frac{b}{2a}$  دارد. این ریشه از معادله

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$  به دست آمده است و چون هر دو معادله  $x + \frac{b}{2a} = 0$  و  $x + \frac{b}{2a} = 0$  جواب یکسان دارند. به جواب مشترک آن‌ها، ریشه مضاعف یا ریشه مکرر مرتبه دوم می‌گوییم.

$$a - d + a + a + d = 21 \Rightarrow a = 7$$

$$(a - d)^2 + a^2 + (a + d)^2 = 219$$

$$\Rightarrow 3a^2 + 2d^2 = 219 \Rightarrow d^2 = 36 \Rightarrow d = \pm 6$$

سه عدد: ۱، ۷، ۱۳



$\Delta < 0$  ,  $x^2$  ضریب  $< 0$  : باید

$$a - 1 < 0 \Rightarrow a < 1 \quad (1)$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow (a - 1)^2 - 4(a - 1)(-4) < 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 + 16a - 16 < 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 14a - 15 < 0 \Rightarrow (a + 15)(a - 1) < 0 \Rightarrow -15 < a < 1 \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow -15 < a < 1$$

$$\begin{cases} a_7 + a_5 + a_4 + a_{11} + a_{14} = 27/5 \\ a_1 + a_6 + a_7 + a_{10} + a_{13} = 25 \end{cases}$$

این دو را از هم کم می کنیم:

$$\Rightarrow 5d = 2/5 \Rightarrow d = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_1 + 3d + a_1 + 6d + a_1 + 9d + a_1 + 12d = 25$$

$$\Rightarrow 5a_1 + 30d = 25 \Rightarrow 5a_1 + 15 = 25 \Rightarrow a_1 = 2$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x \quad (1)$$

$$xy = (x + y) + 14 \xrightarrow{(1)} x\left(\frac{3}{2}x\right) = x + \frac{3}{2}x + 14 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 = \frac{5}{2}x + 14$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 5x - 28 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{361}}{6} \xrightarrow{\text{قابل قبول}} x = \frac{5 + \sqrt{361}}{6} = 4$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{2}\left(\frac{5 + \sqrt{361}}{6}\right) = \frac{5 + \sqrt{361}}{4} = 6 \Rightarrow y - x = \frac{5 + \sqrt{361}}{4} - \frac{5 + \sqrt{361}}{6} = \frac{5 + \sqrt{361}}{12} = 2$$

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin^3 \alpha \leq 1 \Rightarrow -|M| \leq |M|. \sin^3 \alpha \leq |M|$$

$$-1 \leq \cos \beta \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 \beta \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 6 \cos^2 \beta \leq 6$$

$$\Rightarrow -|M| \leq |M| \sin^3 \alpha + 6 \cos^2 \beta \leq |M| + 6$$

$$\Rightarrow -|M| = -5 \Rightarrow M = \pm 5 \Rightarrow \max M = 5$$

عبارت  $(x^2 + 9)$  و  $(|x| + 3)$  همواره + هستند!

بنابراین در تعیین علامت بی تأثیراند. عبارت  $x^2 - x + 1$  نیز  $\Delta < 0$  و  $a > 0$  است پس همواره + خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\frac{1}{x^2 - 1} \leq 0 \xrightarrow{x^2 - 1 \neq 0} x^2 - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1$$

$$۲x^۲ + ۸x - ۱۰ = ۰ \xrightarrow{\div ۲} x^۲ + ۴x - ۵ = ۰$$

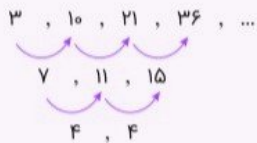
۴ به توان ۲ : نصف ۴

$$\sqrt{(x+۲)^۲} = \sqrt{۹} \Rightarrow x+۲ = \pm ۳ \Rightarrow x = ۱, -۵$$

$$\begin{aligned} \frac{x^۳ - x^۲ - x + ۱}{x^۶ - x^۴ - x^۲ + ۱} &= \frac{x^۳ - x^۲ - x + ۱}{x^۶ - x^۴ - x^۲ + ۱} = \frac{x^۲(x-۱) - (x-۱)}{x^۲(x^۴-۱) - (x^۴-۱)} = \frac{(x-۱)(x^۲-۱)}{(x^۴-۱)(x^۲-۱)} \\ &= \frac{x-۱}{x^۴-۱} = \frac{x-۱}{(x^۲+۱)(x^۲-۱)} = \frac{۱}{(x^۲+۱)(x+۱)} = \frac{۱}{۶(\sqrt{۵}+۱)} = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲۴} \end{aligned}$$

الف

الگوی غیرخطی درجه دوم



$$t_n = an^۲ + bn + c = ۲n^۲ + n$$



$$۱۰ + ۴\sqrt{۶} = ۶ + ۴ + ۲ \times ۲\sqrt{۶} = (\sqrt{۶} + ۲)^۲$$

$$۱۰ - ۴\sqrt{۶} = ۶ + ۴ - ۲ \times ۲\sqrt{۶} = (\sqrt{۶} - ۲)^۲$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (۱۰ + ۴\sqrt{۶})^{\frac{۳}{۲}} + (۱۰ - ۴\sqrt{۶})^{\frac{۳}{۲}} &= (\sqrt{(\sqrt{۶} + ۲)^۲})^{\frac{۳}{۲}} + (\sqrt{(\sqrt{۶} - ۲)^۲})^{\frac{۳}{۲}} \\ &= (\sqrt{۶} + ۲)^۳ + (\sqrt{۶} - ۲)^۳ = ۶\sqrt{۶} + ۳۶ + ۱۲\sqrt{۶} + ۸ + ۶\sqrt{۶} - ۳۶ + ۱۲\sqrt{۶} - ۸ = ۳۶\sqrt{۶} \end{aligned}$$

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = ۳ \Rightarrow \sin \beta = ۳ \cos \beta$$

$$\Rightarrow \frac{۳(۳ \cos \beta) + ۵ \cos \beta}{۱۰ \cos \beta - ۳ \cos \beta} = \frac{۹ \cos \beta + ۵ \cos \beta}{۷ \cos \beta} = \frac{۱۴ \cos \beta}{۷ \cos \beta} = ۲$$

$$\frac{15}{\lambda}x^2 - 30x + 200 > 110$$

$$\frac{15}{\lambda}x^2 - 30x + 90 > 0 \Rightarrow \frac{15}{a}x^2 - \frac{240}{b}x + \frac{720}{c} > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-240)^2 - 4(15)(720) = 57600 - 43200 = 14400$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{240 \pm 120}{30} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{360}{30} = 12 \\ x = \frac{120}{30} = 4 \end{cases}$$

$x$	4	12
$15x^2 - 240x + 720$	$\begin{matrix} + \\ \circ \\ \text{ج} \end{matrix}$	$\begin{matrix} - \\ \circ \\ \text{ج} \end{matrix}$

$$x \in (-\infty, 4) \cup (12, \infty)$$

ب. خیر. تمام جواب‌های به‌دست‌آمده قابل قبول نیست؛ زیرا مثلاً زمان منفی، بی‌معنی است همچنین داشتن ۱۱۰ ضربان در زمان صفر یا نزدیک صفر امکان ندارد.

ب

الف ۱۹

$$0 < |x - 3| < 4 \Rightarrow \begin{cases} 0 < |x - 3| \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{3\} \\ |x - 3| < 4 \Rightarrow -4 < x - 3 < 4 \Rightarrow -1 < x < 7 \Rightarrow x \in (-1, 7) - \{3\} \end{cases}$$

$$|x - 3| \geq 0 : \text{همواره برقرار} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

ب

$$|x - 3| > 0 : x = 3 \text{ در همواره برقرار به جز در } x = 3 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

پ

$$-1 < |x - 3| \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} -1 < |x - 3| \Rightarrow 0 \leq |x - 3| \Rightarrow \text{همواره برقرار} \Rightarrow x \in \mathbb{R} \\ |x - 3| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x - 3 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x \leq 5 \end{cases} \xrightarrow{\cap} 1 \leq x \leq 5$$

ت

ث. عبارت قدر مطلق هیچ‌وقت منفی نمی‌شود، فقط برابر صفر می‌شود:

ث

$$|x - 3| \leq 0 \Rightarrow x = 3$$

ج. عبارت قدر مطلق هیچ‌وقت منفی نمی‌شود.

ج

$$-1 < |x - 3| < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$$

الف ۲۰

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

مطابق شکل :  $BH \perp AE \Rightarrow \alpha = \hat{A}_1$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \alpha \\ \text{موازی و مورب} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{E}_1 = \alpha$$

$$\Rightarrow \tan \hat{E}_1 = \tan \alpha = \frac{AD}{DE} = \frac{6\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \Rightarrow z = x + y + 3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2})$$

$$\sqrt[3]{xyz} = \sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2} \Rightarrow 3\sqrt[3]{xyz} = 3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2})$$

$$\Rightarrow \frac{z - 3\sqrt[3]{xyz}}{x + y} = \frac{x + y + 3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}) - 3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2})}{x + y} = \frac{x + y}{x + y} = 1$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2\omega \Rightarrow \omega a_1 + 1 \cdot d = 2\omega$$

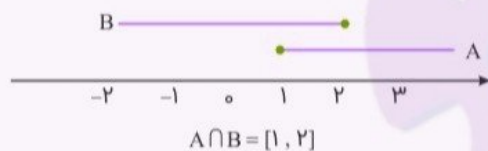
$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 7\omega \Rightarrow \omega a_1 + 3\omega d = 7\omega$$

$$\Rightarrow 2\omega d = \omega \Rightarrow d = \frac{1}{2}, a_1 = 1$$

$$1, 3, 5, 7, \dots$$

$$A: \frac{3x-1}{2} \geq 1 \Rightarrow 3x-1 \geq 2 \Rightarrow 3x \geq 3 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow A = [1, +\infty)$$

$$B: 2x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow B = (-\infty, 2]$$



$$A - B = (2, +\infty), \quad A' = (-\infty, 1)$$



A : علاقه‌مند به موسیقی

B : علاقه‌مند به ورزش

مرحله اول:

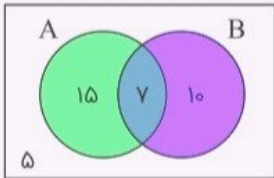
$$n(S) = ۳۷$$

$$n(A \cup B) = ۳۷ - ۵ = ۳۲$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

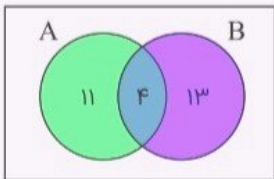
$$۳۲ = ۲۲ + ۱۷ - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = ۷$$

$$n(S) = ۳۷$$



مرحله دوم:

حال در صورتی که ۷ نفر از علاقه‌مندان موسیقی کم شود که ۳ نفر از مشترک‌ها باشند، پس اشتراک از ۷، به ۴ نفر تغییر می‌کند و ۴ نفر دیگر از ۱۵ نفر که فقط به موسیقی علاقه دارند انتخاب می‌شوند. بنابراین افرادی که فقط علاقه‌مند به موسیقی هستند، ۱۱ نفر می‌شود. ولی تعداد افراد ورزشی نباید تغییر کند، چون در مرحله اول، ۱۷ نفر دوستدار ورزش هستند در این مرحله هم باید ۱۷ نفر باشند. پس تعداد افراد ورزشی به جز افراد مشترک با موسیقی، ۱۳ نفر خواهد بود.



در نهایت  $۲۸ = ۱۱ + ۴ + ۱۳$  نفر حداقل به یک زمینه علاقه دارند.

سهم هر تیم را می‌توان به صورت یک دنباله حسابی به شکل زیر نوشت ( $t_1$ : سهم تیم آخر از سکه‌ها):

$$t_1, t_1 + d, t_1 + 2d, t_1 + 3d, t_1 + 4d$$

مطابق فرض مسئله داریم:

$$t_1 + t_1 + d + t_1 + 2d + t_1 + 3d + t_1 + 4d = 60$$

$$\Rightarrow 5t_1 + 10d = 60 \Rightarrow t_1 + 2d = 12$$

ازطرفی قرار است مجموع سکه‌های دریافتی سه تیم اول معادل دو تیم آخر باشد، درنتیجه داریم:

$$t_1 + t_1 + d + t_1 + 2d = t_1 + 3d + t_1 + 4d$$

$$3t_1 + 3d = 2t_1 + 7d \Rightarrow t_1 - 4d = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 + 2d = 12 \\ t_1 - 4d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 2d = 12 \\ -t_1 + 4d = 0 \end{cases} \Rightarrow 6d = 12 \Rightarrow d = 2$$

$$\xrightarrow[t_1 - 4d = 0]{\text{با جایگذاری در}} t_1 - 8 = 0 \Rightarrow t_1 = 8$$

پس ۶۰ سکه به ترتیب زیر بین پنج تیم برگزیده تقسیم خواهد شد:

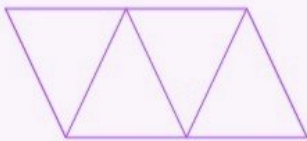
$$8, 10, 12, 14, 16$$

یک پیشنهاد: در سؤالاتی که تعداد جملات دنباله فرد است بهتر است جمله وسط را  $t$  بگیریم و جملات بعدی را با افزودن قدر نسبت و جملات قبل را با کم کردن قدر نسبت به دست آورید. به عنوان مثال:

$$t - 2d, t - d, t, t + d, t + 2d$$

در این صورت راه‌حل‌تان کوتاه‌تر خواهد شد.

$$3, 5, 7, 9, \dots \Rightarrow a_n = 2n + 1$$

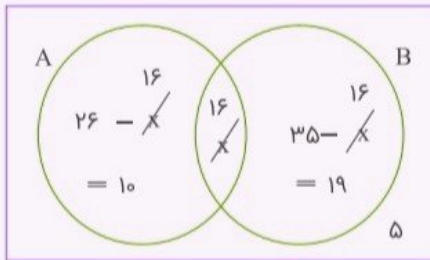


۲۷  
الف

ب

۲۸





$$n(B') = 15 \Rightarrow n(B) = n(U) - n(B') = 50 - 15 = 35$$

$$26 - x + x + 35 - x = 50 - 5 = 45 \Rightarrow 61 - x = 45 \Rightarrow x = 16$$

$$n(A - B) + n(B - A) = 10 + 19 = 29$$

$$10 + 19 + 5 = 34$$

A = فوتبال

B = والیبال

$$n(A \cup B) = 40 - 6 = 34$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 34 = 25 + 32 - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 23$$

$$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 34 - 23 = 11$$

$$(a^3 - b^3) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\Rightarrow \sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$\Rightarrow \sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)(1 + \sin \alpha \cos \alpha)$$

$$a = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1) - (\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{ab + 1}{b} = a + \frac{1}{b} = \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} = 2(\sqrt{2} + 1)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3 \Rightarrow a + a + d + a + 2d = 3 \Rightarrow 3a + 3d = 3 \quad (I)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 = 39 \Rightarrow a + 3d + a + 4d + a + 5d = 39 \Rightarrow 3a + 12d = 39 \quad (II)$$

$$(I), (II) : 9d = 36 \Rightarrow d = 4$$

$$3a + 3d = 3 \xrightarrow{d=4} 3a + 12 = 3 \Rightarrow 3a = -9 \Rightarrow a = -3$$

جملات دنباله :  $-3, 1, 5, 9, 13, \dots$

$$h > 13 \Rightarrow -\omega t^2 + 18t + 13 > 13 \Rightarrow -\omega t^2 + 18t > 0$$

$$\Rightarrow -t(\omega t - 18) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{18}{\omega} \end{cases}$$

$t$	$0$		$\frac{18}{\omega}$	
$-t$	+	0	-	-
$\omega t - 18$	-	-	0	+
$-\omega t^2 + 18t$	-	0	+	0

$$t \in (0, \frac{18}{\omega})$$

$$AC + BC = 19$$

$$\underbrace{(BC + AC)^2}_{19} = \underbrace{BC^2 + AC^2}_{256} + 2AC \cdot BC$$

$$\Rightarrow 361 = 256 + 2(AC \cdot BC) \Rightarrow 2AC \cdot BC = 105$$

$$\Rightarrow AC \cdot BC = 52.5$$

$$\Rightarrow AC = AB \sin \alpha = 16 \sin \alpha$$

$$BC = AB \cos \alpha = 16 \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 16^2 \times \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 52.5 \Rightarrow \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{52.5}{256} \simeq 0.2$$

$$x + y + z = w \Rightarrow x + y = w - z \quad (1)$$

$$w^w - z^w - x^w - y^w = (w^w - z^w) - (x^w + y^w)$$

$$= [(w - z)^w + {}^w w z (w - z)] - [(x + y)^w - {}^w x y (x + y)] \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} w^w - z^w - x^w - y^w = \cancel{(x+y)^w} + {}^w w z (x + y) - \cancel{(x+y)^w} + {}^w x y (x + y)$$

$$= {}^w (x + y) (wz + xy)$$

$$\Rightarrow x^y y + xy^y + w^y z - wz^y = xy(x + y) + wz(w - z) = (x + y)(xy + wz) \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1),(2),(3)} A = \frac{{}^w (x + y) (wz + xy)}{(x + y)(xy + wz)} = {}^w$$

$$\frac{{}^w (x + ۴) + ۵ (x - ۴)}{(x - ۴) (x + ۴)} - \frac{\lambda}{x^y - ۱۶} > 0 \Rightarrow \frac{{}^w x + ۱۲ + ۵x - ۲۰ - \lambda}{x^y - ۱۶} > 0 \Rightarrow p = \frac{\lambda x - ۱۶}{x^y - ۱۶} > 0$$

$$x = ۲$$

$$x = \pm ۴$$

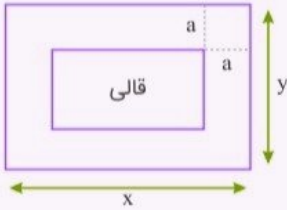
x	$-\infty$	-۴	۲	۴	$+\infty$		
$\lambda x - ۱۶$	-	-	۰	+	+		
$x^۲ - ۱۶$	+	۰	-	-	۰	+	
p	-	۰	+	۰	-	۰	+
			جواب		جواب		

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -۴ < x < ۲ \text{ یا } ۴ < x\}$$

$$\frac{۶ - x^y - x}{x} > 0 \Rightarrow \frac{-(x - ۲)(x + ۳)}{x} > 0$$

X	$-\infty$	0	$\infty$
$f - x^y - x$	-	+	-
X	-	+	+
$\frac{f - x^y - x}{x}$	+	-	-

$$\text{مجموعه جواب} = (-\infty, -۳) \cup (۰, ۲)$$



مساحت اتاق :  $xy = 24$

محیط اتاق  $= 2(x + y) = 20 \Rightarrow x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x$

مساحت اتاق  $= 24 = x(10 - x) \Rightarrow 10x - x^2 - 24 = 0$

$$x^2 - 10x + 24 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 6 \Rightarrow y = 10 - 6 = 4 & \text{قق} \\ x = 4 \Rightarrow y = 10 - 4 = 6 & \text{قق} \end{cases} \quad x > y$$

محیط قالی  $= 2(x - 2a + y - 2a) = 12$

$$x + y - 4a = 6 \Rightarrow 10 - 4a = 6 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

طول قالی :  $x - 2a = 6 - 2 = 4$

عرض قالی :  $y - 2a = 4 - 2 = 2$

پاسخ سؤال ۳۹

۳۹ نادرست